

Allen-Cahn 方程式の さまざまな進行波解をつかまえる*

二宮 広和 (龍谷大学 理工学部)

1 はじめに

拡散現象のようなエネルギーの散逸を伴う現象においては，エネルギーの散逸によって伝播する過程で形が崩れてしまう．熱（拡散）方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

を考えよう．初期値として， $u(x, 0) = \sin x$ をとると，解は $u(x, t) = e^{-t} \sin x$ となり，だんだんと平坦になってしまう．そのため，一定の形で波が伝わっていくためには，形状と拡散の釣り合いが重要となる．例えば，(1.1) には

$$u(x, t) = e^{-c(\pm x - ct)}$$

という解が存在する．これは，エネルギーの散逸とそれに見合うエネルギーが遠方からやってくるため，形を崩さず一定の速度 $\pm c$ で進行する解となっている．このように一定の形状を保って，一定の速度で移動する解を進行波解という．この解は遠方で発散することにより，その形状を保っていたが，外力が加わることによって，形状はさらに保ちやすくなる．ここでは，さまざまな分野で用いられる反応拡散系の進行波解について考える．中でも，Allen-Cahn 方程式，Fisher-KPP 方程式と呼ばれる方程式をとりあげる．反応拡散系の進行波解は，パターン形成や侵入種の伝播などを表現する特徴的な解と考えられ，古くから研究されてきた ([16, 31, 28, 29, 47] などを参照)．

*この解説は，[34] および [38] をもとにしている．

以下のような半線形熱方程式を考えよう.

$$u_t = \Delta u - f(u). \quad (1.2)$$

$f(u) = -u(1-u)$ のとき, この方程式は, Fisher-KPP 方程式とよばれ, $f(u) = -u(1-u)(u-a)$ のとき, Nagumo 方程式あるいは Allen-Cahn 方程式とよばれる. 代入すると方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)(u-a), \quad 0 < a < 1, \quad (1.3)$$

となっており, 潜熱がない場合の相転移問題などから現れる. u は秩序変数と呼ばれるもので, $u = 1$ のとき固相を表し, $u = 0$ のとき液相を, $u = a$ のとき無秩序状態を表している. 高温状態のときは無秩序状態 $u = a$ であるが, 温度を下げていくに従って固相と液相が共存するようになる. パラメーター a は通常, 温度に依存する. a によって固相になりやすいか, 液相になりやすいかが変わってくる. $a = 1/2$ のとき液相と固相が対等な状態となっている. u の代わりに $2u-1$ を考えることにより, $f(u) = -(u+1)(u-a)(1-u)$ を考えることもある. この方が, 対称性がいいので, 分かりやすい場合もある.

2 最大値の原理

Protter-Weinberger [40] から最大値の原理を紹介しよう.

$$L[u] := - \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

とおく. ここで, $a_{i,j}, b_i$ は, \mathbb{R}^N の領域 D 上で一様有界な連続関数で,

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2$$

となる正定数 μ が存在すると仮定する.

2.1 楕円型方程式の最大値の原理

L に関して, 以下の定理が成り立つ.

定理 2.1 (楕円型方程式の最大値の原理). 有界領域 D 上で $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ が,

$$L[u] + h(x)u \leq 0$$

をみたすとする.

(i) $h(x) \equiv 0$ のとき, $\max_{x \in D} u = \max_{x \in \partial D} u$

(ii) $h(x) \geq 0$ のとき, ∂D 上 $u \leq 0$ なら, D 上で $u \leq 0$

最大値の原理から解の一意性もわかる. 実際, D で

$$-\Delta u = 0,$$

および ∂D で $u = 0$ をみたす関数 u を考えよう. D が有界領域のときは, 最大値の原理が成り立つので, $u \geq 0$ となる. また, $v = -u$ も同じ方程式をみたすので, $-u \geq 0$ となり, $u \equiv 0$ が得られる.

条件 $h \geq 0$ は, 本質的である. 例えば,

$$-\Delta u - u = 0, \quad (-\pi < x < \pi), \quad u(\pm\pi) = 0$$

に最大値の原理が適用できるなら,

$$u \leq 0 \quad (-\pi < x < \pi)$$

となるが, この楕円型方程式の解として,

$$u(x) = \sin x$$

があり, $(0, \pi)$ で正となり, 最大値の原理をみたしていない.

一方, 領域が非有界の場合には, 最大値の原理が成り立たない例を作ることができる. 例えば, $u = \sin x \cosh y$ とおくと, $D = (0, \pi) \times \mathbb{R}$ 上では

$$-\Delta u = 0$$

および, ∂D 上では $u = 0$ をみたしているが, D 上で $u > 0$ となる. つまり, 最大値の原理は成り立っていない. 非有界領域上での最大値の原理には, 遠方で挙動に条件が必要となる.

定理 2.2 (Phragmén-Lindelöf の原理). D を非有界領域とし, D 上で $h(x) \geq 0$ とする. さらに

$$L[\phi] + h(x)\phi \geq 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in D} \phi(x) = \infty$$

をみたす正值関数 ϕ が存在すると仮定する. $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ が, D 上で

$$L[u] + h(x)u \leq 0, \quad \liminf_{A \rightarrow \infty} \sup_{\phi(x)=A, x \in D} \frac{u(x)}{\phi(x)} \leq 0$$

をみたすとき、 ∂D 上 $u \leq 0$ なら、 $u \leq 0$ が成り立つ。

[証明] u は有界なので、 $M := \max_{x \in D} |u|$ とする。 $D_A := \{x \in D \mid \phi(x) < A\}$ および

$$v := u - \frac{M}{A}\phi(x)$$

を考える。境界 ∂D_A で $v \leq 0$ をみたし、 D_A 上で

$$L[v] + h(x)v \leq 0$$

も得られる。 D_A は有界領域なので、定理 2.1 を用いると D_A で $v \leq 0$ 、つまり、 $u \leq M\phi/A$ が従う。 $x \in D$ に対して、十分大きな A をとると、 $x \in D_A$ かつ

$$u(x) \leq \frac{M}{A}\phi(x)$$

をみたすので、 $A \rightarrow \infty$ とすることにより、 D 上 $u \leq 0$ が従う。 \square

これより、 $D = \mathbb{R}^n$ のとき、有界な解に関しては、最大値の原理が適用できることがわかる。

補題 2.3. 有界領域 B_R 上で定数でない関数 $u \in C^2(B_R)$ が、

$$L[u] + h(x)u \leq 0$$

をみたし、 B_R 上 $u(x) < 0$ 、 $u(x_0) = 0$ となる $x_0 \in \partial B_R$ が存在するとすると、

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

となる。ここで ν は B_R の外向き法線ベクトルである。

条件より

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$$

は明らかに従うので、等号がとれることが重要なポイントである。これを用いると強最大値の原理を示すことができる。

定理 2.4 (楕円型方程式の強最大値の原理). 有界領域 D 上で $u \in C^2(D)$ が、

$$L[u] + h(x)u \leq 0$$

をみたし、定数関数でないとする。

- (i) $h(x) \equiv 0$ のとき, u は D の内部で最大値をとらない. 境界でのみ最大値をとる.
- (ii) $h(x) \geq 0$ のとき, ∂D 上 $u \leq 0$ なら, D 内では $u < 0$ となる.

つぎに放物型方程式の最大値の原理を思い出しておく. $Q_T := D \times (0, T)$, $\Gamma := D \times \{t = 0\} \cup \partial D \times [0, T]$ と表すことにする. 係数は t にも依存してよく, Q_T で有界と仮定する.

定理 2.5 (放物型方程式の最大値の原理). 関数 $u \in C^{2;1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ が Q_T 上で

$$u_t + L[u] + h(x, t)u \leq 0$$

をみたすとする. Γ 上 $u \leq 0$ なら, Q_T 上で $u \leq 0$ が成り立つ.

D が非有界のとき, 以下のような定理が成り立つ.

定理 2.6 (最大値の原理). 関数 $u \in C^{2;1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ が Q_T 上で

$$u_t + L[u] + h(x, t)u \leq 0$$

をみたすとする. ある正数 c があって

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} e^{-cR^2} \left(\max_{|x|=R, 0 \leq t \leq T, x \in D} u(x, t) \right) \leq 0$$

が成り立つと仮定する. このとき, Γ 上 $u \leq 0$ なら, Q_T 上で $u \leq 0$ が成り立つ.

2.2 最大値の原理の応用

2.2.1 優解・劣解

L を (2.1) で与えたものとし, その係数は Ω 上有界とする.

$$L[\bar{U}] + f(\bar{U}) \geq 0 \quad (x \in \Omega), \quad \bar{U} \geq 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

のとき, 優解といい,

$$L[U] + f(U) \leq 0 \quad (x \in \Omega), \quad U \leq 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

のとき, 劣解と呼ばれる. また, γ を十分大きく取って

$$\gamma > \max_{|u| \leq M} |f_u(u)|$$

ととり、 $L + \gamma$ が逆をもつようにしておく。

補題 2.7 (Sattinger [42]). 優解 \bar{U} と劣解 \underline{U} が

$$\underline{U}(x) \leq \bar{U}(x) \quad (x \in \Omega)$$

をみたすと仮定する。

$$L[U] = -f(U) \tag{2.2}$$

$$U(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{2.3}$$

の解である。さらに、

$$\underline{U}(x) \leq U(x) \leq \bar{U}(x)$$

が成り立つ。

[証明] 以下のような関数列 $\{u_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ を考える。

$$L[u_n] + \gamma u_n = -f(u_{n-1}) + \gamma u_{n-1},$$

$$u_n(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$u_0 = \underline{U}.$$

まず、

$$\underline{U} < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1} < \dots < \bar{U}.$$

をみたすことを示そう。

$$L[u_0 - u_1] + \gamma(u_0 - u_1) = L[u_0] + \gamma u_0 + f(u_0) - \gamma u_0 \leq 0$$

$$u_0(x) - u_1(x) \leq 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

に最大値の原理を用いることにより、

$$u_0 \leq u_1$$

が成り立つ。平均値の定理より、

$$L[u_n - u_{n+1}] = \{-f'(\theta u_{n-1} + (1 - \theta)u_n) + \gamma\}(u_{n-1} - u_n),$$

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

となる θ が存在する。最大値の原理を帰納的に用いることにより $u_n - u_{n+1} \leq 0$ が示される。 $u_n(x)$ は単調増大列である。

一方,

$$\begin{aligned} L[u_n - \bar{U}] + \gamma(u_n - \bar{U}) &= L[u_n] + \gamma u_n - L[\bar{U}] - \gamma \bar{U} \\ &\leq -f(u_{n-1}) + \gamma u_{n-1} + f(\bar{U}) - \gamma \bar{U} \\ &\leq \{-f'(\theta u_{n-1} + (1-\theta)\bar{U}) + \gamma\} (u_{n-1} - \bar{U}) \end{aligned}$$

および境界条件

$$u_n(x) - \bar{U}(x) \leq 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

より, 帰納的に

$$u_n \leq \bar{U}$$

が成り立つことがわかる. 従って, 極限関数

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

が存在する.

Schauder 評価を用いることにより, 極限関数 $U(x)$ は滑らかであり, (2.2)–(2.3) をみたすことが従う. \square

その他の応用として, 交点非増大の性質や Gidas-Ni-Nirenberg などの結果が有名である.

3 Allen-Cahn 方程式の 1 次元進行波解

進行波解 (traveling wave) とはその形状が時刻 t によらず一定で, 一定速度 c で平行移動する解のことである. つまり, $u(x, t) = \phi(x - ct)$ という形になっている. ここで c は進行波の速度を, ϕ はその形状を表している. 変数 x の代わりに動座標 $z = x - ct$ を用いると, 速度 c で動く座標系で解を観察していることになり, 速度 c の進行波解は, 止まって見える. そのため, 変換した方程式

$$-\phi_{zz} - c\phi_z + f(u) = 0 \tag{3.1}$$

の定常解となる.

3.1 厳密解

ここでは, いわゆる Huxley 解の求め方を説明していく. Allen-Cahn 方程式

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-a) \tag{3.2}$$

の速度 c の進行波解は,

$$-c\phi' = \phi'' + \phi(1 - \phi)(\phi - a) \quad (3.3)$$

をみます. 進行波解の存在を示すことは, (ϕ, c) を求める問題となる. この厳密解を探すため, まず $c = 0$, $a = \frac{1}{2}$ の場合

$$\phi'' + \phi(1 - \phi)\left(\phi - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.4)$$

を考えてみよう. さらに

$$\phi(-\infty) = 1, \quad \phi(\infty) = 0 \quad (3.5)$$

という条件を課そう. (3.4) の両辺に ϕ' をかけると

$$\phi'' \cdot \phi' = -\phi(1 - \phi)\left(\phi - \frac{1}{2}\right)\phi'$$

となる. さらにこれを z で積分すると

$$\int \phi'' \phi' dz = - \int \phi(1 - \phi)\left(\phi - \frac{1}{2}\right) d\phi \quad (3.6)$$

となる. したがって (3.6) は

$$\frac{1}{2}|\phi'|^2 = \frac{1}{4}\phi^2(\phi - 1)^2 + C \quad (3.7)$$

となる. ここで (3.5) より, $z \rightarrow -\infty$ で $\phi \rightarrow 1$, $\phi' \rightarrow 0$ なので, $C = 0$ とわかる. $\phi' \leq 0$ を考慮すると, (3.7) は,

$$\phi' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(1 - \phi) \quad (3.8)$$

と変形できる. これを変数分離法で計算し, 適当に平行移動すると

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}} \quad (3.9)$$

と求められる. この解の軌道は図 1 のようになる.

次に (3.9) から (3.2) の進行波を作ろう.

$$u(x, t) = \phi(x - ct)$$

とおく. (3.3) を変形して

$$-c\phi' = \phi'' + \phi(1 - \phi)\left(\phi - \frac{1}{2}\right) + \phi(1 - \phi)\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

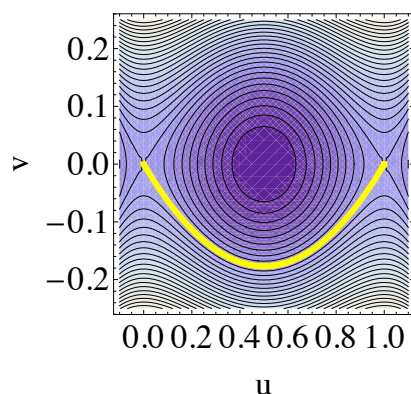


図 1: $a = 1/2$ のときの (3.2) の等高線と (3.9) の軌道

および (3.4) に注意すると

$$-c\phi' = \left(\frac{1}{2} - a\right)\phi(1 - \phi)$$

となる. (3.8) より

$$c = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

と計算できる. こうして $a = \frac{1}{2}$ の場合の定常解から $a \neq \frac{1}{2}$ のときの進行波解

$$\psi_0(x - c_0t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x - ct}{\sqrt{2}}}}, \quad c_0 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - a\right) \quad (3.10)$$

が得られた.

この方法は, [39, 10] でも用いられているように一般の関数 f に対しても拡張できる. 実際,

$$u'' - f(u) = 0$$

が速度 $c = 0$ の単調減少な進行波解 u があるとすると,

$$u' = -\sqrt{2F(u)}$$

をみताす. ここで,

$$F(u) := \int_0^u f(s)ds$$

である. これを用いると

$$-\varepsilon u' = u'' - f(u) + \varepsilon\sqrt{2F(u)} \quad (3.11)$$

と変形でき,

$$u_t = u_{xx} - f(u) + \varepsilon\sqrt{2F(u)}$$

は進行波解 (u, ε) をもつことがわかる.

なお, (3.2) の定常解も

$$u_*(x) = \frac{6a}{2(1+a) + \sqrt{2(2-a)(1-2a)} \cosh \sqrt{a}x} \quad (3.12)$$

と具体的に計算できる (図2参照). これは速度 $c = 0$ のパルス型の進行波解とみなせる. さらに, a と 1 あるいは 0 と a をつなぐ特殊な進行波解も Painlevé の方法を用いて具体的に求めることができる ([30]):

$$\psi_1(x - c_1 t) = \frac{ae^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2} + 1}{e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2} + 1} \quad \left(c_1 = \frac{1+a}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.13)$$

$$\psi_2(x - c_2 t) = \frac{a}{1 + e^{ax/\sqrt{2}-(a^2/2-a)t}} \quad \left(c_2 = \frac{a-2}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.14)$$

3.2 進行波解の構造

ここでは, Hadeler–Rothe [27] の結果を紹介しよう. $0 < a \leq 1/2$ の場合を考えよう. $1/2 \leq a < 1$ の場合は, u を $1-u$ と考えることにより, $0 < a \leq 1/2$ に帰着できる. また, $c \leq 0$ なら $u(x-ct)$ の代わりに $u(-x-ct)$ を考えると $c \geq 0$ となるので, $c \geq 0$ と仮定して一般性を失わない.

進行波解の方程式 (3.1) は,

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -cv + f(u), \end{cases} \quad (3.15)$$

と 1 階常微分方程式系に変形できる. 平衡点 $(u^*, v^*) = (0, 0), (a, 0), (1, 0)$ のまわりでの線形化行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(u^*) & -c \end{pmatrix}$$

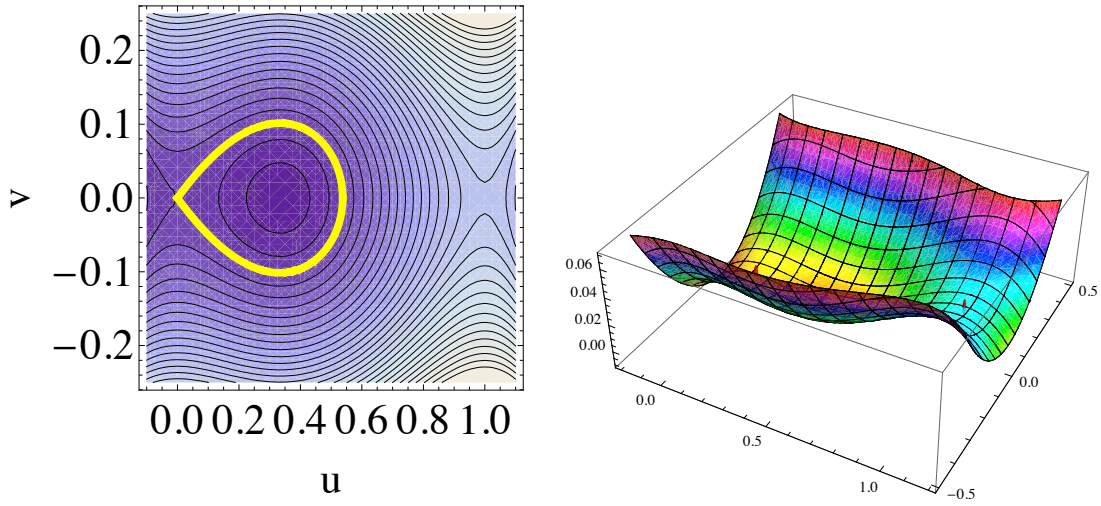
である. これより, 対応する固有値・固有ベクトルをまとめると, 以下の表のようになる.

平衡点	行列	固有値 λ	固有ベクトル
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -c \end{pmatrix}$	$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a}}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(1-a) & -c \end{pmatrix}$	$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a(1-a)}}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & -c \end{pmatrix}$	$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4(1-a)}}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

平衡点 $(0, 0), (1, 0)$ では、正と負の固有値があり、1次元の安定多様体と不安定多様体をもつ鞍点になっている。固有ベクトルの形から、固有値が正（負）のとき、固有関数のベクトルの傾きが正（負）になっていることもわかる。また、平衡点 $(a, 0)$ のまわりでは、

$$|c| < c_* := 2\sqrt{a(1-a)}$$

のとき、複素固有値となり、螺旋状に回転し、 $c > c_* = 2\sqrt{a(1-a)}$ では、2つの固有値が共に負で結節点となる。



(a) $V(u, v)$ の等高線と定常解 (黄色曲線) (b) $V(u, v)$ のグラフ (赤点は平衡点)

図 2: $a = 1/3$ のときの (3.16) の等高線とグラフ

$$V(u, v) := \frac{1}{2}v^2 - F(u) \tag{3.16}$$

は、

$$\frac{d}{dx}V(u, v) = vv' - f(u)u' = v(-cv - f(u)) - f(u)v = -cv^2$$

となり、Lyapunov 関数になっている。 $c > 0$ なら x に関して単調に減少し、 $c < 0$ なら増加する。 Allen-Cahn 方程式 (3.2) の 1 に収束する進行波解の軌道は、 (3.15) の $(1, 0)$ の不安定多様体と考えられる。 $c = 0$ のとき、等高線上を動く軌道になっていることと c が大きくなると、 V は単調性に減少することに注意する。 これより、 $c = c_0 = \sqrt{2}(1/2 - a)$ のとき、丁度 $(0, 0)$ と $(1, 0)$ をつなぐ進行波解 (3.10) が存在し、 $0 \leq c < c_0$ のとき、第 3 象限へ出て行ってしまい進行波解は存在せず、 $c_0 < c$ のとき、 $(a, 0)$ に収束する。 さらに、固有値の情報から、 $c_0 < c < c_* = 2\sqrt{a(1-a)}$ のとき、螺旋状に $(a, 0)$ に近づき (図 3)、 $c_* \leq c < c^*$ のとき、あるベクトルに沿って $(a, 0)$ に近づくことがわかる (図 4)。

さて、単調な進行波解の最小速度を考えよう。(3.13)は、

$$\psi_{1x} = -\frac{(1-a)^2 e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2}}{\sqrt{2}(e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2} + 1)^2}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{1x}}{\psi_1 - a} &= -\frac{(1-a)^2 e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2}}{\sqrt{2}(e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2} + 1)^2} \cdot \frac{e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2} + 1}{1-a} \\ &= -\frac{(1-a)e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2}}{\sqrt{2}(e^{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2} + 1)} \rightarrow -\frac{1-a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となっている。一方、 $c = c_1 = (1+a)/\sqrt{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a(1-a)}}{2} \\ &= -\frac{1-a}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}a \end{aligned}$$

となっている。 $a < 1/3$ のとき、

$$\lambda_- = -\frac{1-a}{\sqrt{2}} < \lambda_+ = -\sqrt{2}a < 0$$

なので、進行波解(3.13)は、固有値 λ_- に対応する固有ベクトル方向に $(a, 0)$ に漸近している。つまり、より速く漸近する不変多様体になっているので、単調な進行波解の最小速度 c^* の解であることがわかる。また、 $1/3 < a < 1/2$ のときは、領域 $\{(u, v) \mid a \leq u \leq 1, g(u) \leq v \leq 0\}$ を考えることにより

$$2\sqrt{f'(a)} \leq c^* \leq \inf_{g(a)=0, g'(a)>0, g(u)>0} \sup_{a \leq u \leq 1} \left\{ g'(u) - \frac{f(u)}{g(u)} \right\} \leq \sup_{a < u < 1} \left(\gamma(1+a-2u) + \frac{u}{\gamma} \right)$$

と評価できる。この右辺は、 $\gamma^2 \geq 1/2$ のとき、最大値は $u = a$ でとるので、

$$2\sqrt{a(1-a)} \leq c^* \leq \left(\gamma(1-a) + \frac{a}{\gamma} \right)$$

となる。 $\gamma = \sqrt{a/(1-a)}$ とおくと、最小値 $2\sqrt{a(1-a)}$ をとる。つまり、 $1/3 \leq a < 1/2$ のときは、 $\gamma^2 = a/(1-a) \geq 1/2$ なので、右辺は、 $2\sqrt{a(1-a)}$ となる。こうして、

$$c^* = 2\sqrt{f'(a)}$$

が示された。以上をまとめると、図5のようになる。

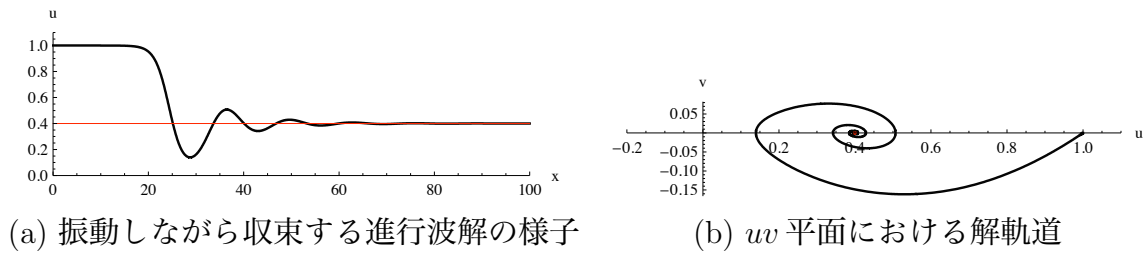


図 3: $a = 0.4, c = 0.2$ のときの (3.2) の進行波解

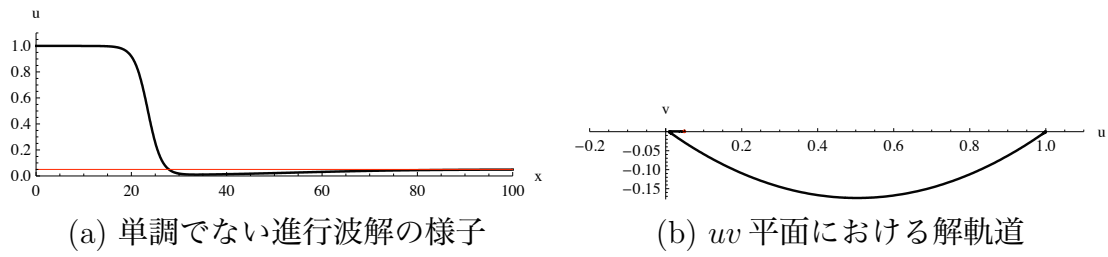


図 4: $a = 0.05, c = 0.65$ のときの (3.2) の進行波解

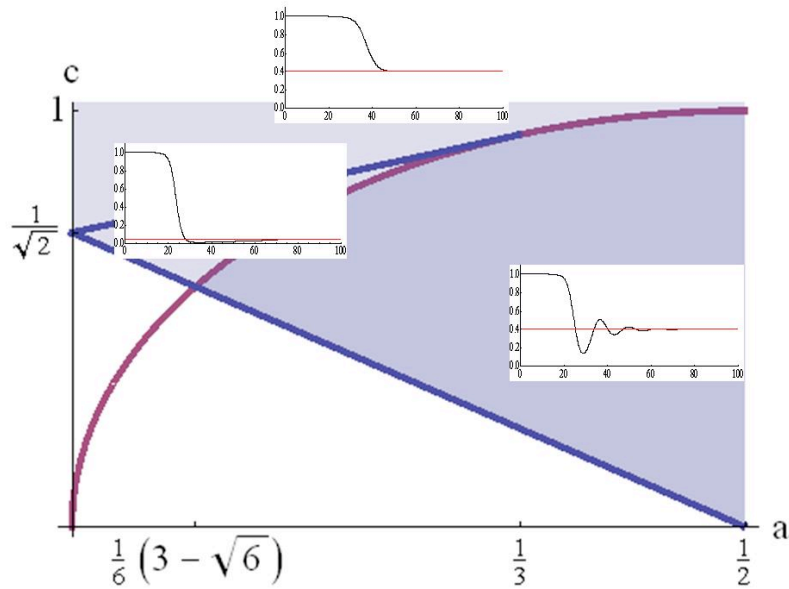


図 5: (3.2) の進行波解

4 進行波解の優解・劣解とその応用

ここでは, Allen-Cahn 方程式の進行波解の優解・劣解を構成しよう. ここでの証明は,

$$f(\pm 1) = 0, \quad f'(\pm 1) > 0,$$

を仮定すれば十分である. 進行波解と同じ速度で運動する動座標系 $z = x - ct$ を導入することにより, 方程式 (1.2) は,

$$w_t - cw_z - w_{zz} + f(w) = 0 \quad (4.1)$$

となるので,

$$\mathcal{F}[w] := w_t - cw_z - w_{zz} + f(w)$$

とおく.

$$-c\Phi' - \Phi'' + f(\Phi) = 0, \quad \Phi(-\infty) = -1, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad \Phi' > 0 \quad (4.2)$$

をみたす速度 c の進行波解 $\Phi(z)$ が存在するとする. つまり, (4.1) の定常解であり,

$$\mathcal{F}[\Phi] = 0$$

をみたしている.

補題 4.1 (Chen [9]). $w^\pm(z, t)$ を

$$w^\pm(z, t) := \Phi(z \pm \sigma\delta(1 - e^{-\beta t})) \pm \delta e^{-\beta t}$$

とおく. ある (十分大きな) σ が存在して, $\delta \in (0, \delta_1/2]$ に対して w^+ , w^- は, それぞれ (4.1) の優解・劣解になる.

[証明] $\xi = z \pm \sigma\delta(1 - e^{-\beta t})$ として, w^\pm を代入して,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[w^\pm] &= \pm\Phi'\sigma\delta\beta e^{-\beta t} \mp \delta\beta e^{-\beta t} - c\Phi' - \Phi'' + f(\Phi \pm \delta e^{-\beta t}) \\ &= \pm\delta\beta e^{-\beta t}(\Phi'\sigma - 1) - f(\Phi) + f(\Phi \pm \delta e^{-\beta t}) \\ &= \pm\delta\beta e^{-\beta t} \left(\Phi'(\xi)\sigma - 1 + \frac{1}{\beta} \int_0^1 f'(\Phi(\xi) \pm \theta\delta e^{-\beta t}) d\theta \right) \end{aligned}$$

と変形できる. ここで, 括弧内を J とおく. つまり,

$$J := \Phi'(\xi)\sigma - 1 + \frac{1}{\beta} \int_0^1 f'(\Phi(\xi) \pm \theta\delta e^{-\beta t}) d\theta$$

が正であることを示せばよい. Φ' が正のときは, σ を大きく取って, 他の項を抑えることができる. Φ' が 0 に近づくと, これでは抑えることができないが, そこでは, Φ の値は, ± 1 に近いので, f' が正になり, J が正であることが従う.

厳密に説明していこう。十分小さな正数 δ_1 を

$$f'(s) > 0 \quad (-1 - \delta_1 \leq s \leq -1 + \delta_1, 1 - \delta_1 \leq s \leq 1 + \delta_1)$$

ととり,

$$m_f := \min_{-1-\delta_1 \leq s \leq -1+\delta_1, 1-\delta_1 \leq s \leq 1+\delta_1} f'(s) > 0, \quad (4.3)$$

$$M_f := \max_{-1-\delta_1 \leq s \leq 1+\delta_1} |f'(s)| > 0, \quad (4.4)$$

$$\beta_0 := \frac{1}{2}m_f \quad (4.5)$$

とおく。このとき,

$$\gamma_1 := \min_{\Phi^{-1}(-1+\delta_1) \leq \xi \leq \Phi^{-1}(1-\delta_1)} \Phi'(\xi) > 0$$

となる。

$\xi \leq \Phi^{-1}(-1 + \delta_1)$, $\Phi^{-1}(1 - \delta_1) \leq \xi$ のとき,

$$-1 + \frac{m_f}{\beta_0} \geq 0$$

をみたし, J が正となる。 $\Phi^{-1}(-1 + \delta_1) \leq \xi \leq \Phi^{-1}(1 - \delta_1)$ のとき,

$$\sigma\gamma_1 - 1 + \frac{M_f}{\beta_0} \geq 0$$

をみたすように σ とると, J が正となり, w^\pm が優解, 劣解になることが従う。 \square

補題 4.1 を用いて双安定型の単調増加な進行波解 $\Phi(x - ct)$ の一意性を示そう。

補題 4.2 (一意性). (4.2) の解は, $\Phi(\cdot + \xi)$ に限る。

[証明] Φ 以外に別の進行波解 Ψ が存在したとしよう。 Φ, Ψ が (4.2) をみたすとする。十分小さな正数 δ と大きな正数 ξ_1, ξ_2 をとると,

$$\Phi(z - \xi_1) - \delta \leq \Psi(z) \leq \Phi(z + \xi_2) + \delta$$

とできる。これに補題 4.1 を用いると,

$$\Phi(z - \xi_1 - \sigma\delta(1 - e^{-\beta t})) - \delta e^{-\beta t} \leq \Psi(z) \leq \Phi(z + \xi_2 + \sigma\delta(1 - e^{-\beta t})) + \delta e^{-\beta t}$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ として,

$$\Phi(z - \xi_1 - \sigma\delta) \leq \Psi(z) \leq \Phi(z + \xi_2 + \sigma\delta)$$

が得られる。これより,

$$\xi_* := \inf\{\xi : \Psi(z) \leq \Phi(z+\xi) \quad (z \in \mathbb{R})\}, \quad \xi^* := \sup\{\xi : \Psi(z) \geq \Phi(z+\xi) \quad (z \in \mathbb{R})\}$$

とし, $\xi_* = \xi^*$ を示せば一意性が示される.

$\xi_* < \xi^*$ と仮定しよう.

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \Phi'(\xi) = 0$$

なので, ある正数 M が存在して,

$$2\sigma\Phi'(\xi) \leq 1 \quad (|\xi| \geq M)$$

とできる. $\xi_* < \xi^*$ なので, $\Psi(z) \not\equiv \Phi(z + \xi^*)$ である. また,

$$\Psi(z) \leq \Phi(z + \xi^*)$$

なので, 強最大値の原理より十分小さな正数 $h (< 1/(2\sigma))$ が存在し,

$$\Psi(z) < \Phi(z + \xi^* - 2\sigma h) \quad (|z + \xi^*| \leq M + 1)$$

とできる. $|z + \xi^*| \geq M + 1$ では,

$$\begin{aligned} \Phi(z + \xi^* - 2\sigma h) - \Psi(z) &\geq \Phi(z + \xi^* - 2\sigma h) - \Phi(z + \xi^*) \\ &= \int_0^1 \Phi'(z + \xi^* - 2\theta\sigma h) d\theta \cdot (-2\sigma h) \\ &\geq -h \end{aligned}$$

なので,

$$\Psi(z) < \Phi(z + \xi^* - 2\sigma h) + h \quad (z \in \mathbb{R})$$

が従う. これに補題 4.1 をもう一度用いると

$$\Psi(z) < \Phi(z + \xi^* - 2\sigma h + \sigma h(1 - e^{-\beta t})) + he^{-\beta t}$$

となり, $t \rightarrow \infty$ で

$$\Psi(z) < \Phi(z + \xi^* - \sigma h)$$

が得られる. これは, ξ^* の定義に矛盾する. つまり, $\xi_* = \xi^*$ が示され, 一意性が得られる. □

この性質を用いて, 大域的な漸近安定性を示すこともできる.

5 多次元進行波解

ここでは2次元以上の全空間における進行波解について考えよう. $f(u)$ は, $(u^2 - 1)(u - a)$ のような $(-1, a, 1)$ だけで0となる) 関数とし, \mathbb{R}^N 上の Allen-Cahn 方程式

$$u_t = \Delta u - f(u) \quad (5.1)$$

を考える. 方程式 (5.1)(あるいは (1.3)) は, 正の速度 k をもつ1次元の進行波解 Φ が存在すると仮定する. つまり, Φ と $k > 0$ は (4.2) に対応する

$$-k\Phi' - \Phi'' + f(\Phi) = 0, \quad \Phi(-\infty) = -1, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad \Phi' > 0$$

をみたすとする.

回転することにより, 多次元進行波解の進行方向は x_N 軸として一般性を失わない. $y = x_N$ と x_N 以外の成分 $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ とに分けて, $v(x, y - ct)$ という形で与えられる進行波解を探そう. $z = y - ct$ および \mathbb{R}^{N-1} 上のラプラス作用素

$$\Delta' := \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

と定義すると, 進行波解は楕円型方程式

$$-cv_z = \Delta' v + v_{zz} + f(v) \quad (5.2)$$

の解となる. 遠方での条件は

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v(x, z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} v(x, z) = -1. \quad (5.3)$$

である. 1次元の解 $\Phi(z)$ は, (5.2) と (5.3) をみたす解であり, その等高線が超平面になっていることから, 平面波解と呼ばれる. ここでは, 平面波解以外の進行波解 v と c の存在およびその性質について考えていこう.

まず, 2次元平面 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ で考えよう. 図1(a)のように速度 k で, 右下側と左下側から単位法線ベクトル \mathbf{n}_i 方向に進む2つの平面波 $\Phi((x, y) \cdot \mathbf{n}_i - kt)$ ($i = 1, 2$) が角度 2α でぶつかる状況を考える. 各々の平面波解は, その法線方向に速度 k で移動するので, y 軸方向には速度 $c = k/\sin \alpha$ で移動することに注意しよう. これから, この2つの平面波は, ぶつかる場所あたりでは相互作用をして変形したとしても, 遠方では, y 方向に一定速度 k で移動すると思われるので, 図1(b)のようなV字型進行波解が現れることが予想される. より正確には,

$$v^+(x, y) := \min \{ \Phi((x, y) \cdot \mathbf{n}_1 - kt), \Phi((x, y) \cdot \mathbf{n}_2 - kt) \} \quad (5.4)$$

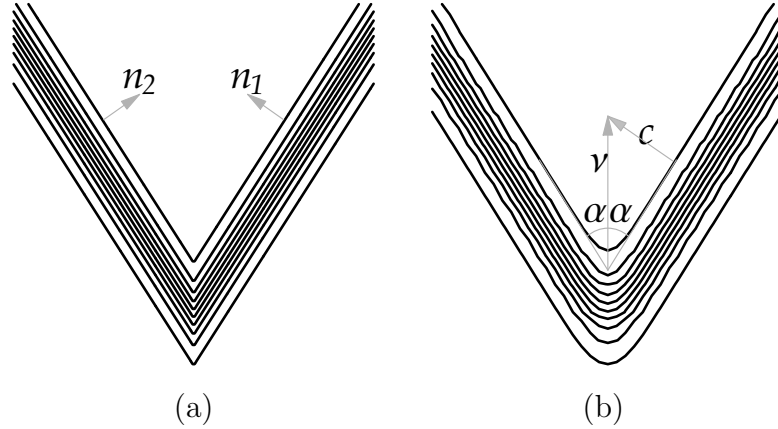


図 1: v^+ の等高線 (a) と 2 次元空間上の進行波解の等高線 (b)

とおくと、この関数は 2 つの平面進行波解の小さい方なので優解になる。この優解より出発する解を考えてみよう。遠方では、等高線が直線なので平面波解と同じように運動するとしてよいであろうから、 y 軸方向に c で進む。ここで、速度 c は k より大きいことに注意する。つぎに、“角”の部分に注目してみよう。 v^+ の等高線は“角”があるが、拡散項の影響で“角”が取れて丸くなるであろう。等高線の“角”が取れすぎてその部分の等高線の曲率が小さくなり過ぎると平面進行波解の速度 k に近くなるので、優解より遅く動くことになる。一方、“角”がきついとその箇所では曲率の影響でより速度が大きくなる効果をもたらす。こうして“角”の部分の等高線は、時間が経つと少しずつ丸くなるが、あまり平坦になることはなく、適合する適当な形が選択されて図 1(b) のような V 字型の進行波解に収束していくと予想される。実際、この考え方で優解・劣解を構成すれば、進行波解の存在が示される。

定理 5.1 ([21, 22, 38, 39]). $N \geq 2$ のとき、任意の速度 $c > k$ に対して、(5.2),(5.3) の解 $v(x, z)$ が存在する。

$u = -1$ と $u = 1$ を結ぶ空間 1 次元の双安定系の進行波解の速度は一意に決まったが、上の結果からわかるように、多次元空間では、V 字形の角度に対応して k より大きい任意の速度をもつ進行波解が存在する。

$N = 2$ のときは、Hamel-Monneaux-Roquejoffre [21, 22] および Ninomiya-Taniguchi [38, 39] が証明した。 $N \geq 3$ の場合、Hamel-Monneaux-Roquejoffre [21, 22] は進行方向の軸を中心に回転対称な進行波解 $\tilde{v}(|x|, y - ct)$ の構成に成功している。空間 2 次元の場合の進行波解の等高面は、直線に漸近する形状であるのに対して進行方向に回転対称な進行波解の等高面は、回転方向の曲率が影響し遠方で直線に漸近することはない。また、Taniguchi [44, 45] が、角錐状の進行波解の構成に成功している。このような V 字型の進行波解は、化学反応 (Belousov-Zhabotinsky 反応) などでも観察される ([35],[12])。類似の

結果として, Fife [13], Bonnet-Hamel [7], Hamel-Nadirashvili [23, 24], Hamel-Monneau [19] を挙げておく.

5.1 2次元のV字進行波解の構成

$$u(x, y, t) = w(x, y - ct, t), \quad z = y - ct.$$

とおくと, 方程式は, 以下のように変形される.

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} - w_{zz} - cw_z + f(w) &= 0, & (x, z) \in \mathbb{R}^2, t > 0. \\ w|_{t=0} &= u_0 & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

初期値 $w(x, z, 0; u_0) = u_0(x, z)$ をみたす方程式 (5.5) の解を $w(x, z, t; u_0)$ で表すことにする.

$$\mathcal{F}[v] := -v_{xx} - v_{zz} - cv_z + f(v) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \quad (5.6)$$

を考えよう. 2つの平面波解 $\Phi(k(z \pm m_*x)/c)$ は (5.6) をみたしている.

$$\begin{aligned} v^+(x, z) &:= \min \left\{ \Phi\left(\frac{k}{c}(z - m_*x)\right), \Phi\left(\frac{k}{c}(z + m_*x)\right) \right\} \\ &= \Phi\left(\frac{k}{c}(z - m_*|x|)\right) \end{aligned}$$

は (5.5) の優解になる. この関数 $v^+(x, z)$ は, z に関して単調増加関数である.

v^+ を初期値とする解を考え, この解が進行波解に収束することを示す.

定理 5.2 (V字進行波解の存在). 以下のような (4.1) の進行波解 $u(x, y, t) = v_*(x, y - ct)$ が存在する:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x^2 + z^2 > R^2} |v_*(x, z) - v^+(x, z)| &= 0, \\ v_*(x, z) &< v^+(x, z). \end{aligned}$$

進行波解 v_* は, 無限遠では, 0 に収束するような摂動に関して漸近安定である. 実際, 以下が成り立つ.

定理 5.3 (安定性). 初期値 $u_0(x, y)$ は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x^2 + y^2 > R^2} |u_0(x, y) - v^+(x, y)| = 0, \quad (5.7)$$

をみたすと仮定すると, (4.1) の解 $u(x, y, t; u_0)$ は,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, y, t; u_0) - v_*(x, y - ct)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} = 0$$

となる.

この定理から, 進行波解の一意性も従うことに注意しておく.
まず, 定数

$$\kappa := \frac{1}{2}m_f > 0$$

をとり, $\alpha_1, \alpha_2 \in (-1, 1)$ を

$$f'(s) \geq \kappa \quad (s < \alpha_1, s > \alpha_2)$$

となるように選んでおく. $\Phi(z)$ は単調増加なので, 定数 A と B を

$$\Phi(-A) = -1 + \frac{\delta_1}{2}, \quad \Phi(B) = 1 - \frac{\delta_1}{2},$$

ととる. $-A < \mu < B$ では,

$$-1 + \frac{\delta_1}{2} < \Phi(\mu) < 1 - \frac{\delta_1}{2}$$

となる.

まず, φ は $y = m_*|x|$ に指数的に漸近する凸関数とする. すると, Φ は指数的に ± 1 に収束するため,

$$\max \{|\Phi'(\zeta)|, |\Phi''(\zeta)|\} \leq K_1 \exp(-\gamma_1|\zeta|) \quad (5.8)$$

をみたす. また, φ も

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi) - m_*|\xi| + |\varphi'(\xi) - m_*| + |\varphi''(\xi)| + |\varphi'''(\xi)| &\leq K_2 \operatorname{sech}(\gamma_2\xi), \\ K_3 \operatorname{sech}(\gamma_2\xi) &\leq \frac{c}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} - k \leq K_4 \operatorname{sech}(\gamma_2\xi), \\ m_*|\xi| &\leq v(\xi), \\ \mu_- &\leq \mu(\xi) \leq \mu_+ \end{aligned}$$

をみたすような正定数 γ_1, γ_2, K_i ($i = 1, \dots, 4$) と μ_\pm が存在する ([37]).

命題 5.4. $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ and $0 < \alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$, に対して

$$v^-(x, z; \varepsilon, \alpha) := \Phi \left(\frac{z - v(\alpha x)/\alpha}{\sqrt{1 + \varphi'(\alpha x)^2}} \right) - \varepsilon \operatorname{sech}(\gamma_2 \alpha x)$$

が(4.1)の劣解となるような正定数 ε_0 と $\alpha_0(\varepsilon)$ が存在する. その上,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x^2+z^2 > R^2} |v^+(x, z) - v^-(x, z; \varepsilon, \alpha)| \leq 2\varepsilon, \quad (5.9)$$

$$v^-(x, z; \varepsilon, \alpha) < v^+(x, z), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.10)$$

$$(v^-)_z(x, z; \varepsilon, \alpha) > 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.11)$$

が成り立つ.

命題 5.4 と補題 2.7(Sattinger の方法) により, 進行波解の存在が示される.

5.2 命題 5.4 の証明の概要

$$\begin{aligned} \xi &:= \alpha x, \\ \zeta &:= \frac{z - v(\alpha x)/\alpha}{\sqrt{1 + \varphi'(\alpha x)^2}}, \\ \sigma(\xi) &:= \varepsilon \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi), \end{aligned}$$

とおくと, 連鎖律より,

$$\zeta_x = -\frac{\alpha \varphi' \varphi''}{1 + \varphi'^2} \zeta - \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}, \quad (5.12)$$

$$\zeta_{xx} = -\frac{\alpha^2 \varphi''^2 + \alpha^2 \varphi' \varphi'''}{1 + \varphi'^2} \zeta + \frac{3\alpha^2 \varphi'^2 \varphi''^2}{(1 + \varphi'^2)^2} \zeta + \frac{\alpha(\varphi'^2 - 1)\varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{3/2}} \quad (5.13)$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[v^-] &= -\frac{\Phi''(\zeta)}{1 + \varphi'(\xi)^2} - (\Phi'(\zeta)\zeta_x)_x - \frac{c\Phi'(\zeta)}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} - f(\Phi(\zeta) - \sigma(\xi)) + \alpha^2 \sigma''(\xi) \\ &= \left(1 - \frac{1}{1 + \varphi'(\xi)^2} - \zeta_x^2\right) \Phi''(\zeta) - \zeta_{xx} \Phi'(\zeta) + \left(k - \frac{c}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}}\right) \Phi'(\zeta) \\ &\quad + f(\Phi(\zeta)) - f(\Phi(\zeta) - \sigma(\xi)) + \alpha^2 \sigma''(\xi) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

と計算できる. ここで

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left(1 - \frac{1}{1 + \varphi'(\xi)^2} - \zeta_x^2\right) \Phi''(\zeta), \\ I_2 &:= -\zeta_{xx} \Phi'(\zeta), \\ I_3 &:= -\left(\frac{c}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} - k\right) \Phi'(\zeta), \\ I_4 &:= -f(\Phi - \sigma) + f(\Phi) + \alpha^2 \sigma'' \end{aligned}$$

とした. (5.12) および (5.13) より,

$$\begin{aligned} I_1 &= -\alpha \left\{ \left(\frac{\varphi' \varphi''}{1 + \varphi'^2}\right)^2 \alpha \zeta^2 + \frac{2\varphi'^2 \varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{3/2}} \zeta \right\} \Phi''(\zeta), \\ I_2 &= -\alpha \left\{ -\frac{\varphi''^2 + \varphi' \varphi'''}{1 + \varphi'^2} \alpha \zeta + \frac{3\varphi'^2 \varphi''^2}{(1 + \varphi'^2)^2} \alpha \zeta + \frac{(\varphi'^2 - 1) \varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{3/2}} \right\} \Phi'(\zeta) \end{aligned}$$

なので, $0 < \alpha \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq K_5 \alpha \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi), \\ |I_2| &\leq K_6 \alpha \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi), \\ I_3 &\leq -K_3 \Phi'(\zeta) \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi) < 0, \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. Φ' は $|\zeta|$ が大きいとき 0 に近づくが, そのときは, I_4 が他の項を抑えてくれる. こうして, v^- は劣解となる. また, $v^+ - v^-$ を評価することにより (5.10) も示すことができる. \square

この命題を用いて進行波解の一意性や大域的な漸近安定性も示すことができる.

つぎに, 回転対称な進行波解があるとき, その等高面がどうなるか考えてみよう. あるリップシツツ連続な関数 $\gamma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ があって,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z - \gamma(x) < -R} v(x, z) &= -1, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{z - \gamma(x) > R} v(x, z) &= 1 \end{aligned}$$

となる速度 c の進行波解 v が存在するとしよう. このとき, 最大値の原理より,

$$-1 \leq v \leq 1, \quad v_z > 0$$

が従う. さらに $\lambda \in (0, 1)$ のとき, $\Gamma_\lambda := \{(x, z) | v(x, z) = \lambda\}$ 上では,

$$\inf_{\Gamma_\lambda} |v_z| > 0$$

である。こうして,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \gamma(x) \right| = \cot \alpha = \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{c}$$

が導かれる ([21]). これは, 速度 c によって進行波解の形状 φ の等高面の漸近的な傾きが決まることを意味している. また, この収束は $N = 2$ のときは指数的であるが, $N \geq 3$ のときは $1/|x|$ に比例し, 漸近線をもたないことに注意しておく ([22]).

この角度 α によってその進行波の形状にどう変化するのも興味深い問題である. $\alpha < \pi/2$ では, 上で見たように速度 c の進行波解になる. $\alpha = \pi/2$ では等高面はフラットになり 1次元の進行波解に帰着される. $\alpha > \pi/2$ になると, 曲率は速度を抑える方向に働くため等高面はどんどん平らになり, 等高線は, 自己相似的に拡大する円弧のように振る舞う. このような解については, 文献 Deckelnick-Elliott-Richardson [12], Hamel-Nadirashvili [24] を参照してほしい. また, α が $\pi/2$ より小さいが十分近いときに, 摂動によって生じる挙動を分岐理論を用いて調べた研究 [25] もある.

6 均衡時の多次元進行波解

前節で扱った Allen-Cahn 方程式では, 正の速度で伝播する平面進行波解が存在するので, 非均衡な場合と呼ばれる. この場合には, 2つの平面進行波解を用いて, 多次元進行波解の構成が可能となった. 均衡しているとき, つまり

$$\int_{-1}^1 f(u) du = 0$$

が成り立つときは, (5.1) の定数解 $u = -1$ と $u = 1$ の引き込み領域はバランスし, (5.1) の平面進行波解の速度は 0 になる. つまり定常解になっている. そのため, 前節のような方法では進行波解を構成は期待できない. しかし, この場合にも 2次元以上の空間では任意の正の速度をもつ進行波解が存在する.

定理 6.1 ([10]). 均衡している場合でも $N \geq 2$ のとき, 任意の正の速度 c に対して (5.2), (5.3) の解 v_* が存在する.

このような解の存在証明に (3.11) を用いて, 定常解を進行波解にする. つまり, 任意の ε に対して

$$-\varepsilon u_z = \Delta u - f(u) + \varepsilon \sqrt{2F(u)}$$

には, 平面進行波解が存在する. そこで, 定理 5.1 の適用すると, 任意の速度 c の V 字型進行波解 v_ε が存在する. $v_\varepsilon(0) = 1/3$ となるように v_ε を平行移動しておく, 集合 $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ は, 楕円型方程式の Schauder 評価より, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき収束するような部分列がとれ, 収束先 v_* が, (5.1) の進行波解となることが示される ($v_*(0) = 1/3$ なので, これ

は自明な解ではない). 優解・劣解をうまく構成することによって遠方での条件を確かめることができる. さらに, この進行波解の幾何学的形状について以下のようなことがわかっている.

定理 6.2 ([10]). $N \geq 2$ とする. 定理 6.1 で構成した速度 c の進行波解を v_* とする.

$$\Gamma = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid v_*(x, z) = 0 \right\}$$

とおくと,

(i) $N > 2$ のとき, Γ は, 漸近的には以下のような放物面に近づく:

$$\lim_{z \rightarrow \infty, (x, z) \in \Gamma} \frac{|x|^2}{2z} = \frac{n-1}{c}.$$

(ii) $N = 2$ のとき, ある正の定数 A が存在して以下をみたす.

$$\lim_{z \rightarrow \infty, (x, z) \in \Gamma} \frac{\cosh(2\sqrt{f'(1)} x)}{\sqrt{f'(1)} z} = \frac{A}{c}.$$

この進行波解の一意性は大変興味深い問題である. 実際, $c = 0$ のときは, 次の De Giorgi の予想と関係が深い.

De Giorgi の予想: $N \leq 8$ のとき, $|u| \leq 1$ をみたす方程式

$$\Delta u + u - u^3 = 0$$

の x_N に関して単調減少な解 u の等高面は超平面となる.

この予想に条件 (5.3) を加えた問題も議論されている ([18]). $c \neq 0$ では (5.3) を加えてもこの予想は正しくなく, $c = 0$ という条件が本質的であることを定理 6.2 は意味している. なお, 最新の結果として, De Giorgi の予想は Savin [43] により肯定的に解かれた.

ところで, この予想の中で空間次元に関する仮定があるのは, $N \geq 9$ の場合には, 超平面以外にも \mathbb{R}^N 上グラフで表される極小曲面が存在することに起因している ([6]). $N \geq 9$ の場合も, [11] によって研究されている.

最後に, 多次元の進行波解の研究としてシリンダー領域での進行波解については, Gardner [17], Berestycki-Nirenberg [5], Heinze-Papanicolaou-Stevens[26]などを参照してほしい.

多次元の反応拡散方程式の解の挙動は, ある極限をとると界面の運動方程式に帰着される場合が多い. 上述の問題も平均曲率流と関係し, また前節の場合は外力をもつ平均曲率流と関係が深い. 外力をもつ平均曲率流の運動として, [12, 37] を, 界面進行波解の安定性の論文として [36] を挙げておく.

最後に, Allen-Cahn 方程式の平面波でない進行波解として, 不均衡な場合に存在する定常解と安定な状態をつなぐ進行波解の研究もされていることを付け加えておく ([33]).

参考文献

- [1] S. Allen and J.W. Cahn, *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta. Metall. **27** (1979), pp. 1084-1095.
- [2] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, Partial Differential Equations and Related Topics, ed. J. A. Goldstein, Lecture Notes in Math. **446** (1975), 5-49.
- [3] **D. G. Aronson and H. F. Weinberger**, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. **30** (1978), 33-76.
- [4] H. Berestycki, F. Hamel and N. Nadirashvili, *The speed of propagation for KPP type problems I: Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 173-213.
- [5] H. Berestycki and L. Nirenberg, *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. Henri Poincare **5** (1992), 497-572.
- [6] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268.
- [7] A. Bonnet and F. Hamel, *Existence of nonplanar solutions of a simple model of premixed Bunsen flames*, SIAM J. Math. Anal. **31** (1999), pp. 80-118.
- [8] M. Bramson, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves*, Mem. Amer. Math. Soc. **44** (1983), no. 285.
- [9] **X. Chen**, *Existence, uniqueness, and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 125-160.
- [10] X.F. Chen, J.S. Guo, F. Hamel, H. Ninomiya, and J.M. Roquejoffre, *Traveling Waves with Paraboloid Like Interfaces for Balanced Bistable Dynamics*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **24** (2007), 369-393
- [11] M. Del Pino, M. Kowalczyk, and J. Wei, *On De Giorgi conjecture in dimension $N \geq 9$* , preprint
- [12] K. Deckelnick, C. M. Elliott, and G. Richardson, *Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex*, Non-linearity **10** (1997), 655-678.

- [13] P. C. Fife, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces* (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. 53), SIAM (1988).
- [14] **P. C. Fife and J. B. McLeod**, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.
- [15] P. C. Fife and J. B. McLeod, *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*, Arch. Ration. Mech. Anal. **75** (1980/81), 281–384.
- [16] R. A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics **7** (1937), 355–369.
- [17] R. Gardner *Existence of multidimensional traveling wave solutions of an initial-boundary value problem* J. Differential Equations **61** (1986), 335–379.
- [18] N. Ghoussoub and C. Gui, *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann. **311** (1998), 481–491.
- [19] F. Hamel and R. Monneau, *Solutions of semilinear elliptic equations in \mathbb{R}^N with conical-shaped level sets*, Comm. Partial Diff. Equations **25** (2000), 769–819.
- [20] F. Hamel and R. Monneau, *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces Free Boundaries **4** (2002), 167–210.
- [21] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, *Existence and qualitative properties of multidimensional conical bistable fronts*, Disc. Cont. Dyn. Systems **13** (2005), 1069–1096.
- [22] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, *Asymptotic properties and classification of bistable fronts with Lipschitz level sets*, Disc. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 75–92.
- [23] F. Hamel and N. Nadirashvili, *Entire solutions of the KPP equation*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1255–1276.
- [24] F. Hamel and N. Nadirashvili, *Travelling fronts and entire solutions of the Fisher-KPP equation in \mathbb{R}^N* , Arch. Ration. Mech. Anal. **157** (2001), 91–163.
- [25] M. Haragus and A. Scheel, *Corner defects in almost planar interface propagation*. Ann. Inst. H. Poincaré’ Anal. Non Linéaire **23** (2006), 283–329.

- [26] S. Heinze, G. Papanicolaou and A. Stevens, *Variational principles for propagation speeds in inhomogeneous media* SIAM J. Appl. Math. **62** (2001), 129–148.
- [27] K.P. Hadeler and F. Rothe, *Traveling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biol., **2** (1975), 251–263.
- [28] Ya. I. Kanel, *The behavior of solutions of the Cauchy problem when the time tends to infinity, in the case of quasilinear equations arising in the theory of combustion*, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 533–536.
- [29] Ya. I. Kanel, *Some problems involving burning-theory equations*, Soviet Math. Dokl. **2**(1961), 48–51.
- [30] T. Kawahara and M. Tanaka, *Interactions of traveling fronts: An exact solutions of a nonlinear diffusion equations*, Physics Letters. **97A** (1983), 311–314.
- [31] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bjul. Moskovskogo Gos. Univ. Ser. Internat. Sec. A **1** (1937), 1–26. *Study of the diffusion with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem*, in “Dynamics of curved fronts”, ed. Pierre Pelcé, Academic Press, Boston (1988) 105–130
- [32] H. Matano, K.I. Nakamura and B. Lou, *Periodic traveling waves in a two-dimensional cylinder with saw-toothed boundary and their homogenization limit*, Networks and Heterogeneous Media **1** (2006), 537–568.
- [33] Y. Morita and H. Ninomiya, *Monotone-type traveling waves of bistable reaction-diffusion equations in the multi-dimensional space*, Bulletin of the Institute of Mathematics. **3** (2008) 567–584
- [34] 森田 善久, 二宮 広和, 反応拡散方程式における進行波解と全域解, 数学 **59** (2007), 225-243
- [35] V. Pérez-Muñuzuri, M. Gómez-Gesteira, A.P. Muñuzuri, V.A. Davydov, and V. Pérez-Villar, *V-shaped stable nonspiral patterns*, Physical Review E **51-2** (1995), 845–847.
- [36] M. Nara and M. Taniguchi, *Stability of a traveling wave in curvature flows for spatially non-decaying initial perturbations*, Disc. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 203–220.

- [37] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Stability of traveling curved fronts in a curvature flow with driving force*, Methods and Application of Analysis **8** (2001), 429–450.
- [38] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Existence and global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations*, J. Differential Equations **213** (2005), 204–233.
- [39] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations*, Disc. Cont. Dyn. Systems, **15** (2006), 819–832.
- [40] **M. H. Protter and H. F. Weinberger**, Maximum Principles in Differential Equations, (1984) Springer-Verlag.
- [41] N. Shigesada and K. Kawasaki, Biological Invasions: Theory and Practice, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford Univ. Press., Oxford (1997).
- [42] **D. H. Sattinger**, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Adv. Math. **22** (1976), 312–355.
- [43] O. Savin, *Regularity of at level sets in phase transitions*, Annals of Mathematics, **169** (2009), 41–78.
- [44] M. Taniguchi, *Traveling fronts of pyramidal shapes in the Allen-Cahn equations*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007), 319–344.
- [45] M. Taniguchi, *The uniqueness and asymptotic stability of pyramidal traveling fronts in the Allen-Cahn equations*, J. Differential Equations **246** (2009), 2103–2130.
- [46] A. I. Volpert, V. A. Volpert, V. A. Volpert, Traveling wave solutions of parabolic systems, American Mathematical Society Providence, RI, 1994.
- [47] H. F. Weinberger, *Long time behavior of a class of biological models*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1978), 353–396.
- [48] **J. Xin**, *Front propagation in heterogeneous media*, SIAM Rev. **42** (2000), 161–230.
- [49] J.P. キーナー (坂元訳), 応用数学 上, 下, (2007) 日本評論社
- [50] 太田 隆夫, 界面ダイナミクスの数理, (1997) 日本評論社